

الاختبار : الرياضيات		الجمهورية التونسية وزارة التربية ***
ضارب الاختبار: 2	الحصة : ساعتان	امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام دورة 2018

التمرين الأول (3 نقاط)

يلي كل سؤال ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة .
أكتب على ورقة تحريرك رقم السؤال والإجابة الصحيحة الموافقة له.
(1) ليكن (O, I, J) معينا في المستوي والنقاط (A(1, -1) و B(3, 2) و C(1, 1).

إذا كان ABCD متوازي أضلاع، فإن إحداثيات النقطة D هي :

(أ) (-2, -1) (ب) (-1, -2) (ج) (-2, -3)

(2) يمثل الجدول التالي التكرارات التراكمية الصاعدة لسلسلة إحصائية.

2	1	0	-1	-2	القيمة
20	18	13	9	5	التكرار التراكمي الصاعد

التكرار الموافق للقيمة صفر هو:

(ج) 4

(ب) 0

(أ) 13

(3) العدد $27^{2018} - 2 \times 27^{2017}$ يقبل القسمة على :

(ج) 15

(ب) 12

(أ) 6

التمرين الثاني (4 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيين الموجبين a و b حيث $a^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$.

(1) (أ) قارن العددين a^2 و b^2 .

(ب) بين أن (a - b) عدد موجب.

(2) أحسب $a^2 b^2$ ثم استنتج أن $ab = 7$.

(3) أحسب $(a - b)^2$ ثم استنتج أن $a - b = 2\sqrt{2}$.

(وحدة قيس الطول الصنتمتر)

في الرسم المقابل لدينا :

- ABC مثلث متقايس الضلعين وقام في A، حيث $AB = a$

- E النقطة من [AC] حيث $AE = b$

- H المسقط العمودي للنقطة E على (BC).

(4) (أ) بين أن المثلث HEC متقايس الضلعين.

(ب) بين أن $EH = 2$.

(5) لتكن S مساحة المثلث BEC.

(أ) بين أن $S = a\sqrt{2}$.

(ب) بين أيضا أن $S = 2 + 3\sqrt{2}$ ، ثم استنتج أن $a = 3 + \sqrt{2}$.

(وحدة قيس الطول الصنتمتر)

التمرين الثالث (4 نقاط)

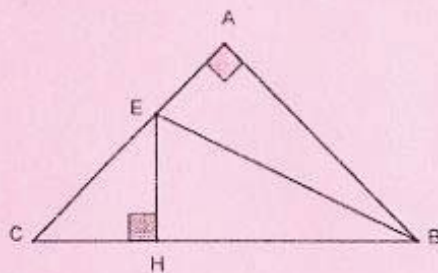
ABC مثلث متقايس الضلعين وقمته الرئيسية A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$.

لتكن النقطة D مناظرة النقطة C بالنسبة إلى A، و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النقطة G.

(1) (أ) بين أن المثلث BCD قائم في B.

(ب) بين أن G مركز ثقل المثلث BCD.



في الأسئلة الموالية، نفترض أن $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

(2) أ) بين أن $BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$.

ب) بين أن $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$.

(3) أ) بين أن $x^2 + 6x - 27 = (x + 3)^2 - 36$.

ب) استنتج أن $x^2 + 6x - 27 = (x - 3)(x + 9)$.

ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$ ، ثم استنتج البعد BG .

(وحدة قياس الطول الصنتمتر)

التصمين الرابع (5 نقاط)

A و B نقطتان من المستوي، حيث $AB = 6$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AB]$. لتكن \mathcal{C} الدائرة التي قطرها $[AB]$

و C نقطة من \mathcal{C} ، حيث $AC = 5$.

(1) أحسب BC .

(2) المماس للدائرة \mathcal{C} في النقطة B يقطع (AC) في النقطة D.

أ) بين أن $CD = \frac{11}{5}$.

ب) أحسب BD .

(3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في النقطة E. لتكن \mathcal{C}' الدائرة التي قطرها $[DE]$

و مركزها O. المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع \mathcal{C}' في النقطة F مخالفة للنقطة D.

أ) بين أن الرباعي BDFE مستطيل.

ب) الدائرتان \mathcal{C} و \mathcal{C}' تتقاطعان في نقطة H مخالفة للنقطة B.

أثبت أن النقاط A و H و F على استقامة واحدة.

(4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في النقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في النقطة K.

أ) بين أن K منتصف $[AF]$.

ب) أثبت أن G مركز ثقل المثلث AED.

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بين أن النقاط J و K و O على استقامة واحدة.

(وحدة قياس الطول الصنتمتر)

التصمين الخامس (4 نقاط)

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $AB = 6$ و $AE = 4$ و $AD = 3$.

(1) أ) بين أن ADG مثلث قائم في D.

ب) أحسب AG و DG .

(2) لتكن M النقطة من $[AE]$ حيث $AM = 3$ و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M.

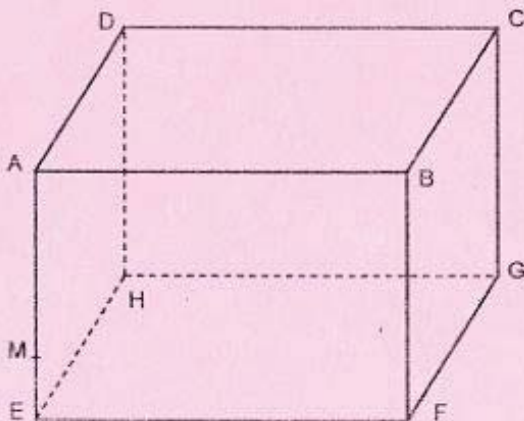
أ) بين أن Δ محتو في المستوي (AEF) .

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N.

بين أن $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$

ج) أحسب MN ثم DN .

(3) أحسب حجم الهرم $NMAD$.



اختبار الرياضيات لدورة 2018

لشهادة ختم التعليم الأساسي

تمرين 1 (3ن)

(1) ب (1) (2) ج (1) (3) ج (1)

1- ABCD متوازي أضلاع اذن قطراه يتقاطعان في المنتصف ومنه

$$y_D = -2 \text{ يعني } 0 = \frac{2+y_D}{2} \text{ يعني } \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{y_B+y_D}{2}$$

(يمكن الإجابة على السؤال بانجاز تعيين للنقاط)

$$13-9 = 4 \quad -2$$

$$\left. \begin{aligned} 27^{2018} - 2 \times 27^{2017} &= 27^{2017} \times (27-2) \\ &= 27^{2017} \times 25 = 15 \times 27^{2016} \times 45 = M_{15} \end{aligned} \right\} -3$$

ان

ان

ان

تمرين 2 (4ن)

بعض العددين المتكافئين لموجبتين a و b حيث $a^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

(1) ا) قارن العددين a^2 و b^2

بما ان $-6\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$ فإن $11 - 6\sqrt{2} < 11 + 6\sqrt{2}$ يعني $b^2 < a^2$

ب) بين ان (a-b) عدد موجب.

لدينا $b^2 < a^2$ وبما ان a و b عددين موجبيين فإن $b < a$ يعني $a - b > 0$ ومنه (a-b) عدد موجب

(2) احسب $a^2 b^2$ ثم استنتج ان $ab = 7$.

$$a^2 b^2 = (11 + 6\sqrt{2})(11 - 6\sqrt{2})$$

لدينا

$$= 11^2 - (6\sqrt{2})^2 = 121 - 72 = 49$$

بما ان $ab \geq 0$ و $(ab)^2 = 49 = 7^2$ فإن $ab = 7$

(3) احسب $(a-b)^2$ ثم استنتج ان $a-b = 2\sqrt{2}$

لدينا:

$$(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= 11 + 6\sqrt{2} - (2 \times 7) + 11 - 6\sqrt{2} = 8$$

وبما ان (a-b) عدد موجب فإن $a-b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ABC مثلث متقايس الضلعين وقام في A، حيث $AB = a$
E النقطة من [AC] حيث $AE = b$

(4) ا) بين ان المثلث HEC متقايس الضلعين

بما ان المثلث ABC متقايس الضلعين وقام في A فإن $\hat{ACB} = \hat{ABC} = 45^\circ$

في المثلث HEC لدينا: $\hat{CHE} = 90^\circ$ و $\hat{ECH} = \hat{ACB} = 45^\circ$

اذن $\hat{CEH} = 180 - (90 + 45) = 45^\circ$ وبالتالي المثلث HEC متقايس الضلعين (له زاويتان متقايستان) فتمه الرئيسية H.

0.25

0.5

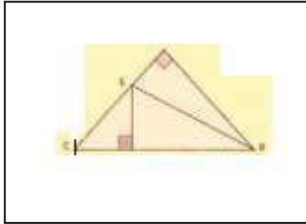
0.25

0.5

0.5

0.25

0.5



(ب) بين أن $EH = 2$.

$$EC = AC - AE = a - b = 2\sqrt{2} \text{ لدينا}$$

المثلث HEC قائم ومتقايس الضلعين (وتره يمثل قطر للمربع الذي ضلعه $[EH]$)

0.5

$$EH = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \text{ إذن } EC = EH\sqrt{2} \text{ يعني}$$

(5) لتكن S مساحة المثلث BEC .

(1) بين أن $S = a\sqrt{2}$.

المثلث ABC قائم ومتقايس الضلعين في A إذن $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ مساحة المثلث BEC هي

$$S = \frac{BC \times EH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times 2}{2} = a\sqrt{2} \quad \leftarrow$$

0.5

(ب) بين أيضا أن $S = 2 + 3\sqrt{2}$ ، ثم استنتج أن $a = 3 + \sqrt{2}$.

لتكن S_1 مساحة المثلث ABC و S_2 مساحة المثلث ABE

إذن

0.25

$$S = S_1 - S_2 = \frac{AB^2}{2} - \frac{AB \times AE}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a \times b}{2} = \frac{11 + 6\sqrt{2} - 7}{2} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{2} = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$a = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3 \text{ وبالتالي } a\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2} \text{ يعني}$$

0.25

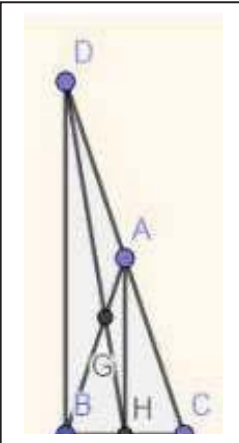
تمرين 3(4ن)

ABC مثلث متقايس الضلعين وقمته الزاوية A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$.
لتكن النقطة D منقطة على قطعة AC بحيث $AD = AB$.

و H المستقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النقطة G .

(1) بين أن المثلث BCD قائم في B .



في المثلث BCD لدينا $\left. \begin{array}{l} A \text{ منتصف } [DC] \\ AB = AC = AD \end{array} \right\}$ لأن C و D متناظرتان بالنسبة إلى A

0.5

اذن المثلث BCD قائم في B (وتره $[DC]$)

(ب) بين ان G مركز ثقل المثلث BCD .

المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A و $[AH]$ ارتفاعه الموافق للضلع $[BC]$

اذن فهو كذلك موسطه الصادر من A ومنه H منتصف $[BC]$.

في المثلث BCD لدينا: $[BA]$ و $[DH]$ هما الموسطين الصادرين على التوالي من B و D

0.5

اذن نقطة تقاطعهما G هي مركز ثقل هذا المثلث.

نفترض ان $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

$$(2) \text{ بين ان } BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$$

لدينا: $AC = AB = x + 3$ و $DC = 2AC = 2(x + 3)$

المثلث BCD قائم اذن حسب نظرية فيثاغورس: $BD^2 + BC^2 = DC^2$

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = [2(x+3)]^2 - 2^2 = 4(x+3)^2 - 4 = 4[(x+3)^2 - 1] \\ = 4(x^2 + 6x + 9 - 1) = 4(x^2 + 6x + 8)$$

0.75

(ب) بين ان $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$

بما ان BD موجب فان: $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $BD^2 = (2\sqrt{35})^2 = 140$ يعني $4(x^2 + 6x + 8) = 140$

$$\text{يعني } x^2 + 6x + 8 = \frac{140}{4} = 35 \text{ يعني } x^2 + 6x + 8 - 35 = 0 \text{ يعني } x^2 + 6x - 27 = 0$$

0.5

(3) بين ان $x^2 + 6x - 27 = (x+3)^2 - 36$

$$(x+3)^2 - 36 = x^2 + 6x + 9 - 36 = x^2 + 6x - 27$$

(ب) استنتج ان $x^2 + 6x - 27 = (x-3)(x+9)$

لدينا:

$$x^2 + 6x - 27 = (x+3)^2 - 36 = (x+3)^2 - 6^2 = (x+3-6)(x+3+6) = (x-3)(x+9)$$

0.5

(ج) اوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$ ، ثم استنتج البعد BG

$BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$ يعني $(x-3)(x+9) = 0$ يعني $x+9=0$ او $x-3=0$ يعني $x=-9$ او $x=3$

0.5

وبما ان x عدد حقيقي موجب فان $x=3$

نعلم ان G مركز ثقل المثلث BCD و $[BA]$ موسطه الصادر من B اذن $BG = \frac{2}{3}BA = \frac{2}{3} \times (3+3) = 4$

0.25

تمرين 4(5ن)

A و B نقطتان من المستوى، حيث $AB = 6$ و Γ مماس لعمدة السهم $[AB]$ لتكن ω الدائرة التي قطرها $[AB]$

و C نقطة من ω ، حيث $AC = 5$.

1) أوجد BC .

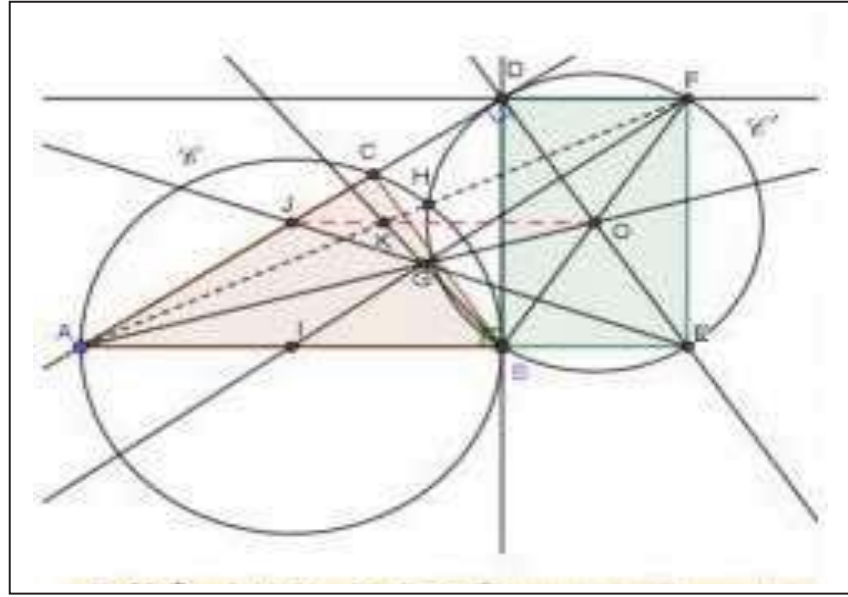
لدينا Γ دائرة و $[AB]$ قطر لها و C نقطة منها حيث $C \neq B$ و $C \neq A$ إذن المثلث ABC قائم في C

حسب نظرية فيثاغورس فإن: $BC^2 + AC^2 = AB^2$ إذن $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$$BC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25$$

0.5

$$BC = \sqrt{11}$$



2) المماس للدائرة ω في النقطة B يقطع AC في النقطة D .

$$CD = \frac{11}{5}$$

المثلث ABD قائم في B و $[BC]$ ارتفاعه الصادر من B . إذن $BC^2 = AC \times CD$

0.75

$$CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{11}{5}$$

ومنه

ب) أوجد BD .

المثلث BCD قائم في C . حسب نظرية فيثاغورس فإن $BD^2 = BC^2 + CD^2$

$$BD^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + (\sqrt{11})^2 = \frac{121}{25} + \frac{11 \times 25}{1 \times 25} = \frac{121 + 275}{25} = \frac{396}{25}$$

يعني

0.5

$$BD = \sqrt{\frac{396}{25}} = \frac{6}{5} \sqrt{11}$$

ومنه

3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في نقطة E. لكن \hat{E} هي الدائرة التي قطرها [DE] و مركزها O. المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع \hat{E} في نقطة F مختلفة للنقطة D.

أ) بين أن الرباعي BDFE مستطيل

$\hat{D}\hat{F}E = 90^\circ$ إذن $F \neq E$ و $F \neq D$ $\hat{D}E$ قطر لها و F نقطة منها حيث
ولنا $\hat{D}BE = 90^\circ$ لأن $\hat{D}BA = 90^\circ$ و $E \in (AB)$
لنا $(DF) \parallel (AB)$ و $(DB) \perp (AB)$ إذن $(DB) \perp (DF)$ ومنه $\hat{B}DF = 90^\circ$

0.75

بالتالي الرباعي BDFE له 3 زوايا قائمة فهو مستطيل.

ب) الدائرتان \hat{E} و \hat{F} تتقاطعان في نقطة H مختلفة للنقطة B. ائت أن التقاطع A و H و F على استقامة واحدة.

المثلث AHB يقبل الأرتسام في الدائرة \hat{E} التي قطرها [AB] يمثل أحد أضلاعه إذن فهو قائم في H ومنه $(AH) \perp (BH)$
المثلث FHB يقبل الأرتسام في الدائرة \hat{F} التي قطرها [BF] يمثل أحد أضلاعه إذن فهو قائم في H
ومنه $(FH) \perp (BH)$ إذن $(FH) \parallel (AH)$ وبالتالي التقاطع A و H و F على استقامة واحدة.

0.5

4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في نقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في نقطة K.

أ) بين أن K منتصف [AF]

في المثلث ABF لدينا: $\left. \begin{array}{l} [AO] \text{ هو الوسط الصادر من } A \\ [FI] \text{ هو الوسط الصادر من } F \end{array} \right\}$ و بما أن $(FI) \cap (AO) = \{G\}$

0.75

فإن G مركز ثقل المثلث ABF ومنه $AG = \frac{2}{3}AO$

(BG) هو المستقيم الحامل للوسط الصادر من B. وحيث أن $(BG) \cap (AF) = \{K\}$ فإن K منتصف [AF]

0.25

ب) أثبت أن G مركز ثقل المثلث AED.

[AO] هو الوسط الصادر من A للمثلث ADE، ولنا $G \in [AO]$ بحيث $AG = \frac{2}{3}AO$ وبالتالي G مركز ثقل المثلث AED.

0.75

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بين أن التقاطع J و K و O على استقامة واحدة.

لنا G مركز ثقل المثلث ADE إذن (EG) هو المستقيم الحامل للوسط الصادر من E وحيث أن $(EG) \cap (AD) = \{J\}$ فإن J منتصف [AD].

في المثلث ABF لنا: O منتصف [BF] و K منتصف [AF] إذن $(OK) \parallel (AB)$

في المثلث ADE لنا: O منتصف [DE] و J منتصف [AD] إذن $(OJ) \parallel (AE)$

وبما أن $(AB) \parallel (AE)$ فإن $(OK) \parallel (OJ)$ ومنه التقاطع J و K و O على استقامة واحدة.

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $AB=6$ و $AE=4$ و $AD=3$
 (1) بين ان مثلث ADG قائم في D .

لدينا $\left. \begin{array}{l} (AD) \perp (DC) \\ (AD) \perp (DH) \end{array} \right\}$ لان $(ABCD)$ مستطيل و $(ADHE)$ مستطيل

وبما ان المستقيمين (DC) و (DH) محتويين في المستوي (DCG) ومتقاطعين في D

فان (AD) يعامد المستوي (DCG) في D .

ولنا $(DG) \subset (DCG)$ اذن $(AD) \perp (DG)$ في D ومنه المثلث ADG قائم في D .

(ب) احسب AG و DG

المثلث DCG قائم في C . اذن حسب نظرية فيثاغورس فان:

$$DG^2 = DC^2 + CG^2$$

$$DG = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \quad \text{اذن}$$

$[AG]$ هو قطر لمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ اذن

$$AG = \sqrt{DC^2 + AD^2 + AE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61}$$

(2) لتكن M النقطة من $[AE]$ حيث $AM = 3$ و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M .

(أ) بين ان Δ محتو في المستوي (AEF) .

3 دق

لدينا: $\left. \begin{array}{l} (EF) \perp (EA) \\ (EF) \perp (EH) \\ (EA) \subset (AED) \\ (EH) \subset (AED) \\ (EA) \cap (EH) = \{E\} \end{array} \right\}$

اذن $(EF) \perp (AED)$ ولنا $\Delta \perp (AED)$ في M

ومنه $(EF) \parallel \Delta$ وبالتالي هما محتويان في مستوي واحد يمر من E و F و M اذن $\Delta \subset (MEF) = (AEF)$

(ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N . بين ان $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$

في المثلث AEF لنا: $M \in (AE)$ و $N \in (AF)$ حيث $(MN) \parallel (EF)$

حسب مبرهنة طاليس في المثلث فان: $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$ بالتالي $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$

(ج) احسب MN ثم DN

$$MN = \frac{3 \times 6}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$$

لنا $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$ اذن $\frac{3}{6} = \frac{MN}{6}$ يعني

لحساب DN نحسب أولا DM

المثلث ADM قائم ومتقايس الضلعين في A اذن $DM = \sqrt{2} \times AD = 3\sqrt{2}$

لدينا: $\left. \begin{array}{l} (MN) \perp (AED) \\ (DM) \subset (AED) \end{array} \right\}$ ومنه $(MN) \perp (DM)$ في M

وبالتالي المثلث DMN قائم في M اذن حسب نظرية فيثاغورس:

$$DN^2 = DM^2 + MN^2$$

$$= (3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 18 + \frac{81}{4} = \frac{153}{4}$$

$$DN = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{17} \quad \text{ومنه}$$

(3) أحسب حجم الهرم NMAD.

لنا $\Delta \perp (AED)$ في M و N نقطة من Δ . إذن $[NM]$ هو ارتفاع الهرم NMAD

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{AD \times AM}{2} \times NM \quad \text{وبالتالي حجمه هو}$$

0.5

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{4} \text{ cm}^3$$